749. 有界且可測ナ核ニヨル積分operatorニ就イテ, II

吉田耕作, 三村征雄, 角谷静夫 (阪大)

§ 3

前号ニ於テ、有界且可測ナ核ニヨル積分operatorハ(L)ニ於ケルoperatorトシテハvollstetigデハナイガ、カヽルoperatorヲ二ツ組合ハシタモノハ(L)ニ於ケルoperatorトシテvollstetigニナルコトヲ証明シタ。トコロガソノ証明ヲヨク調ベテ見ルト実ハ次ノコトガ証明サレテキタノデアル。

> 定理。有界且可測ナ核ニヨル積分operatorハ(M)ヲ(L)ニウツスoperatorトシテvollstetigデアル。

有界且可測ナ核ニヨル積分operatorガ(L)ヲ(M)ニウツスoperatorトシテ連続(＝有界)ナルコトハ明カデアルカラ、カヽル積分operatorヲ2回組合ハセバ(L)→(M)→(L)ナルoperatorハ(L)ヲ(L)ニウツスoperatorトシテvollstetigデアル。

コレハ前号ノ§1ノ終リ(635頁)デ述ベタコトト比較スルト面白イ。

§ 4

前号ガ出来上ツテカラ、最近来タZentralblattヲ見

マシタラ、J. Sirvint ガ C.R.URSS. 18(1938), No. 4―5. P. 255 ニ於テ、私達ノト全ク同ジ結果ヲ得タト報ジテアリマシタ。早速 C.R.URSS ヲ探シテ見マシタラ確カニ同ジ結果ヲ得テ居リマス。

コノ雜誌ハ今年4月ニ來テ居リマスノデ、コレヲ知ラナカッタノハ全ク私達ノ不注意デアリマシタ。シカシ証明ノ方法ハ全然チガッテ居リマス。相當面倒ナモノデスガ考ヘハ面白イカラ次ニコレヲ簡單ナ形ニ直シテ紹介致シマス。

$\boxed{\text{補助定理}}$ 有界且可測ナ核 $K(x,y)$ ($|K(x,y)| \leqq K_0$.) ガ與ヘラレタトキ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ次ノ條件ヲ滿足スル核 $K_\varepsilon(x,y)$ ヲ作ル。

1° $K_\varepsilon(x,y)$ ハ有界且ツ可測。$|K_\varepsilon(x,y)| \leqq K_0$

2° 任意ノ x ニ對シテ x ヲ fix スレバ $K_\varepsilon(x,y)$ ハ y ニ関シテ連續。

3° $K(x,y) \neq K_\varepsilon(x,y)$ トナル如キ点 (x,y) 全体ノ集合ヲ E_ε, E_ε ノ characteristic function ヲ $\varphi_\varepsilon(x,y)$ トスレバ殆ドスベテノ x ニ對シテ

$$\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x,y)\,dy < \varepsilon.$$

証明: $E_0 = [0,1]\times[0,1] \equiv e_0 \times [0,1]$ ($e_0 = [0,1]$) トオキ, $E_n \equiv e_n \times [0,1]$, $E_0 \supset E_1 \supset \cdots\cdots \supset E_n \supset \cdots\cdots$ (即チ $e_0 \supset e_1 \supset \cdots\cdots \supset e_n \supset \cdots\cdots$) ヲ帰納的ニ定義スル。[1] $E_n \equiv e_n \times [0,1]$ ガ既ニ定義サレ $m_2(E_n) = \frac{1}{2^n}$

脚註ハ次頁ヘ

デアッタトセヨ。任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ次ノ如キ measurable set F_n 及ビ E_n ニ於テ定義サレタ連續函數 $K_n(x, y)$ ガ存在スル：

(i) $F_n \subset E_n$, $m_2(E_n - F_n) < \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

(ii) $(x, y) \in F_n$ ナルトキ $K_n(x, y) = K(x, y)$, 又
$(x, y) \in E_n$ ナルトキ $|K_n(x, y)| \leqq K_0$.

$E_n - F_n$ ノ characteristic function ヲ $\varphi_n(x, y)$ トオキ $\int_0^1 \varphi_n(x, y)\, dy > \varepsilon$ トナル如キ點 x 全体ノ集合ヲ e_n^* トセヨ。$e_n^* \subset e_n$ ニテ且ツ $m_1(e_n^*) < \dfrac{1}{2^{n+1}}$ デアル。ヨツテ $e_n^* \subset e_{n+1} \subset e_n$, $m_1(e_{n+1}^*) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ ナル如キ measurable set e_{n+1} ガ存在スル。$E_{n+1} = e_{n+1} \times [0, 1]$ トオク。

此ノ如ク E_n $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ定義シテカラ

$$K_\varepsilon(x, y) = K_n(x, y), \quad (x, y) \in E_n - E_{n+1} \quad 即 \quad x \in e_n - e_{n+1}$$
$$= 0 \qquad\qquad (x, y) \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n \quad 即 \quad x \in \prod_{n=1}^{\infty} e_n$$

トオク。$K_\varepsilon(x, y)$ ガ求ムル函數デアル。$K_\varepsilon(x, y)$ ガ 1°, 2°, 3° ヲ満足スルコトハ明ラカデアル。（補助定理ノ證明終）

---

(1) E_n, F_n ハ平面上ノ點集合ヲ表ハシ、e_n, e_n^* 等ハ直線（x軸）上ノ點集合ヲ表ハス。又 m_1 ハ直線上ノ measure, m_2 ハ平面上ノ measure ヲ表ハス。

此ノ如ク $K_\varepsilon(x,y)$ ヲ定義スレバ、コノ $K_\varepsilon(x,y)$ ヲ核トスル積分 operator ハ (M) ヲ (C) ニウツス operator トシテ vollstetig デアル。コレハ Banach ノ書 opérations linéaires 98 頁ノ定理ヨリ明カ。

ヨッテ、コノ operator ハ又 (M) ヲ (L) ニウツス operator トシテモ vollstetig. シカルニ K, K_ε ニ對應スル operator ヲ夫々 U, U_ε トスレバ U, U_ε ハ (M) ヲ (L) ニウツス operator トシテ $\|U-U_\varepsilon\| \leqq 2K_0\cdot\varepsilon$ ヲ滿足シテヰル。コレハ $K_\varepsilon(x,y)$ ノ作リ方ヨリ明カデアル。$\varepsilon>0$ ハ任意デアッタカラ、ヨク知ラレタ定理 (Banach ノ書 opérations linéaires 96 頁定理 2) ニヨリ U ハ (M) ヲ (L) ヘウツス operator トシテ vollstetig.[(2)]

最後ニ Sirvint ハ有界且ツ可測ナ核ヲモツ integral operator デ (L) ヲ (L) ヘウツスト考ヘタトキ vollstetig デナイモノノ example ヲ與ヘテヰマスが、コレハ偶然ニモ私達が §2 デ與ヘタモノト本質ニ於テ全ク一致シテヰルモノデアリマシタ。

---

(2) J. Sirvint ハ U^2 が (L) ヲ (L) ヘウツス operator トシテ vollstetig ナルコトヲ証明シテヰルダケデ U が (M) ヲ (L) ヘウツス operator トシテ vollstetig デアルコトハ述ベテヰナイ。